Concursul Fractal

A Cincea Ediție, 6 Aprilie 2025

Problema 1. În triunghiul ABC notăm cu r_a, r_b și r_c respectiv razele cercurilor exînscrise lui ABC. Găsiți minimul expresiei $\frac{r_a+r_b+r_c}{r}$, unde r este raza cercului înscris.

Soluție: Fie a,b și c lungimile laturilor triunghiului ABC opuse vârfurilor A, B și C respectiv. Să spunem că cercul înscris are centru I și atinge latura AB în X, iar cercul exînscris are centru J și atinge latura AB în Y. Este bine cunoscut că $AX = \frac{b+c-a}{2}$, iar $AY = \frac{a+b+c}{2}$. Din asemănarea triunghiurilor AIX și AJY obținem că $\frac{r}{r_a} = \frac{b+c-a}{a+b+c}$, deci scriind formulele analoage pentru r_b și r_c obținem că $\frac{r}{r_a} + \frac{r}{r_b} + \frac{r}{r_c} = 1$. Astfel, conform inegalității lui Cauchy obținem: $(\frac{r}{r_a} + \frac{r}{r_b} + \frac{r}{r_c})(\frac{r_a+r_b+r_c}{r}) \geq 9$, cu egalitate dacă și numai dacă $r_a = r_b = r_c$, deci dacă triunghiul ABC este echilateral.

Problema 2. Pe o foaie de hârtie sunt scrise numerele $1 \cdot 2, 2 \cdot 3, ..., (n-1) \cdot n$. În orice minut, Viorel poate șterge de pe foaie două numere x și y, și în locul lor scrie $\frac{\sqrt{xy}}{2}$. După ceva timp, pe tablă a rămas un singur număr. Arătați că el este strict mai mare decât 1.

Soluție: Fie după orice mutare S setul de numere scrise pe foaie, și considerăm numărul $s = \sum_{x \in S} \frac{1}{x}$. Inițial, $s = \frac{1}{1 \cdot 2} + \frac{1}{2 \cdot 3} + \cdots + \frac{1}{(n-1) \cdot n} = 1 - \frac{1}{n} < 1$. Vom arăta că după orice mutare s nu poate crește, deci la final s o să fie mai mic decât 1 deci numărul rămas o să fie mai mare decât 1. Într-adevăr dacă la o mutare am schimbat numerele x și y cu $\frac{\sqrt{xy}}{2}$, clar avem $\frac{1}{x} + \frac{1}{y} \geq \frac{2}{\sqrt{xy}}$ din inegalitatea mediilor.

Problema 3. Fie polinomul $P(x) = x^2 - 2025x + 2025$. Găsiți toate numerele reale x care satisfac următoarele condiții simultan: $\begin{cases} P(P(P(x))) = x. \\ \\ P(P(x)) + P(x) + x \in \mathbb{Q} \end{cases}$

Soluție: Fie $x, P(x)$ și $P(P(x))$ a, b și c respectiv. Vom arăta că unicele soluții sunt $a = b = c = 2025$ și $a = b = c = 1$. Rescriem condiția ca:

$$\begin{cases} a^2 - 2025a + 2025 = b \\ b^2 - 2025b + 2025 = c \\ c^2 - 2025c + 2025 = a \end{cases}$$

Asumăm că mai există o soluție pe lânge cele de mai sus, adică că a, b și c sunt toate diferite de 1 și 2025. Scăzând câte 2025 din ambele părți obținem $a^2 - 2025a = b - 2025$ și relațiile analoage. Înmulțind cele trei relații obținem $abc = 1$. La fel, scăzând câte 1 din fiecare parte și înmulțind obținem că $(a - 2024)(b - 2024)(c - 2024) = 1$, deci folosind $abc = 1$ avem $ab + bc + ca = 2024(a + b + c) - 2024^2$. În final, sumând toate cele trei relații obținem că $a^2 + b^2 + c^2 = 2026(a + b + c) - 2025 \cdot 3$, deci adunând această la această relație de două ori $ab + bc + ca = 2024(a + b + c) - 2024^2$ obținem $(a + b + c)^2 = (2024 \cdot 3 + 2)(a + b + c) - 2025 \cdot 3 - 2024^2 \cdot 2$, dar această ecuație pătratică în $a + b + c$ nu are rădăcini raționale, deci $a + b + c$ nu paote fi rațional, contradicție.

Problema 4. Fie a, b și c trei numere naturale nenule, pentru care considerăm șirul infinit $x_n = (a+b+c)^n - a^n - b^n - c^n$. Să se găsească în funcție de a, b și c respectiv $\gcd(x_1, x_3, x_5, x_7.....)$, unde cu gcd a fost notat cel mai mare divizor comun.

Soluție: Notăm acest divizor comun cu d. Inițial vom arăta că d se împarte la $(a+b)(a+c)(b+c)$. Într-adevăr, fie polinomul $P(x) = (b+c)(x+b)(x+c)$ și polinomul $P_n(x) = (x+b+c)^n - x^n - b^n - c^n$ pentru n impar. Este clar că $P_n(x)$ are toți coeficienții divizibili la $b+c$ și cum ambele rădăcini ale lui $P(x)$ sunt și rădăcini ale lui $P_n(x)$, $P(x)$ divide $P_n(x)$ ca polinoame cu coeficienți întregi, deci $P(a)$ divide $P_n(a)$, deci am arătat că $(a+b)(a+c)(b+c)$ îl divide pe d. La fel, cum $(a+b+c)^3 - a^3 - b^3 - c^3 = 3(a+b)(a+c)(b+c)$, rămâne să vedem dacă d este $(a+b)(a+c)(b+c)$ sau $(a+b)(a+c)(b+c)$, și răspunsul este:
$a)$ $d = (a+b)(a+c)(b+c)$ dacă a, b și c sunt divizibile la 3 sau $(a+b)(a+c)(b+c)$ nu este divizibil la \$3.
$b)$ $d = 3(a+b)(a+c)(b+c)$ altminteri.
Pentru soluțiile din $a)$ se verifică ușor că acesta este răspunsul, iar pentru soluțiile din b avem că $\frac{x_5}{(a+b)(a+c)(b+c)}$ nu este divizibil la 3.